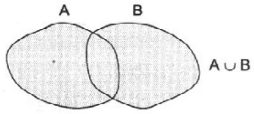
DZIAŁANIA NA ZBIORACH I RELACJE MIĘDZY NIMI

Działania na zbiorach

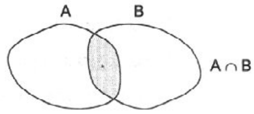
A. Suma zbiorów

$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$



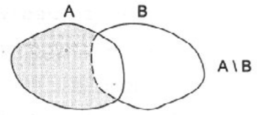
B. Iloczyn zbiorów (część wspólna)

$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$



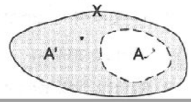
C. Różnica zbiorów

$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$



D. Dopełnienie zbioru A do przestrzeni *X*

$A' = \{x: x \in X \wedge x \notin A\}$

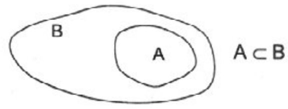


A. Zawieranie się zbiorów (inkluzja)

Zbiór A zawiera się w zbiorze B ($A \subset B$) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Zbiór A nazywamy podzbiorem zbioru B.

$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$



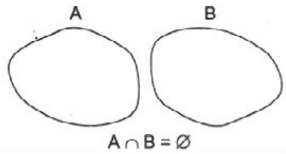
B. Równość zbiorów

Zbiory A i B nazywamy równymi ($A=B$) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

$A = B \Leftrightarrow \bigwedge_x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

C. Zbiory rozłączne

Zbiory A i B, których część wspólna jest zbiorem pustym nazywamy rozłącznymi.



PRAWA RACHUNKU ZBIORÓW

A. Przemienność sumy zbiorów

$A \cup B = B \cup A$

B. Przemienność iloczynu zbiorów

$A \cap B = B \cap A$

C. Łączność sumy zbiorów

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

D. Łączność iloczynu zbiorów

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

E. Rozdzielność iloczynu względem sumy zbiorów

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

F. Rozdzielność sumy względem iloczynu zbiorów

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

G. Prawa de Morgana dla zbiorów

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

ZBIORY LICZBOWE

Zbiór liczb naturalnych (N)

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$N_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

N_+ – zbiór liczb naturalnych dodatnich

Zbiór liczb całkowitych (C)

$C = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$C_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

C_- – zbiór liczb całkowitych ujemnych

Zbiór liczb wymiernych (W)

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę, którą można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in C$ i $q \in C \setminus \{0\}$

$$W = \left\{x : x = \frac{p}{q} \wedge p \in C \text{ i } q \in C \setminus \{0\}\right\}$$

Zbiór liczb niewymiernych (IW)

Liczbą niewymierną nazywamy liczbę, której nie da się przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in C$ i $q \in C \setminus \{0\}$

Zbiór liczb rzeczywistych (R)

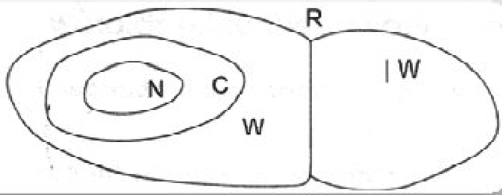
$R = W \cup IW$

$R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$

Związki między zbiorami liczbowymi

$N \subset C \subset W \subset R$, $IW \subset R$,

$W \cup IW = R$, $W \cap IW = \varnothing$



PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Przedział otwarty $(a; b)$

$(a; b) = \{x : x \in R \text{ i } a < x < b\}$

Przedział domknięty $\langle a; b\rangle$

$\langle a; b\rangle = \{x : x \in R \text{ i } a \le x \le b\}$

Przedział lewostronnie domknięty $\langle a; b)$

$\langle a; b) = \{x : x \in R \text{ i } a \le x < b\}$

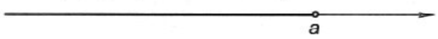
Przedział prawostronnie domknięty $(a; b\rangle$

$(a; b\rangle = \{x : x \in R \text{ i } a < x \le b\}$

Przedziały nieograniczone

$\langle a; \infty) = \{x : x \in R \text{ i } x \ge a\}$

$(a; \infty) = \{x : x \in R \text{ i } x > a\}$



$(-\infty; a\rangle = \{x : x \in R \text{ i } x \le a\}$

$(-\infty; a) = \{x : x \in R \text{ i } x < a\}$

POTĘGOWANIE I PIERWIASTKOWANIE

Potęgowanie

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \end{cases} \quad \text{dla } a \in R \text{ i } n \in N_+$$

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$ i $n \in N_+$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ dla $a \cdot b \neq 0$ i $n \in N_+$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dla $a > 0$ i $m \in C$ i $n \in N_+ \setminus \{1\}$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

Jeżeli a, b, m, n przyjmują takie wartości, że wszystkie wyrażenia występujące w danym wzorze mają sens, to:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

PIERWIASTKOWANIE

1) $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ dla $a \geq 0$ i $b \geq 0$ i $n \in N_+ \setminus \{1\}$

2) $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ dla $a < 0$ i $n = 2k + 1$, $k \in N_+$

Przykłady: $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{|-27|} = -\sqrt[3]{27} = -3$

$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{|-32|} = -\sqrt[5]{32} = -2$

DZIAŁANIA NA PIERWIASTKACH

Jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$ i $n \in N_+ \setminus \{1\}$ i $m \in N_+ \setminus \{1\}$, to:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$
4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
6) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

LOGARYTMOWANIE

1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a a^k = k$
4) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
5) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
6) $a^{\log_a b} = b$

DZIAŁANIA NA LOGARYTMACH

Jeżeli $x > 0$ i $y > 0$ i $a > 0$ i $a \neq 1$, to

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a x^k = k \log_a x$ dla $k \in R$

4. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ dla $c > 0$ i $c \neq 1$

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie zbudowane z liczb wyrażonych za pomocą liter i cyfr połączonych ze sobą znakami działań i nawiasami.

Wzory skróconego mnożenia

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kwadrat sumy
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ kwadrat różnicy
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ różnica kwadratów
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sześcian sumy
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ sześcian różnicy
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ suma sześcianów
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ różnica sześcianów

KOLEJNOŚĆ WYKONYWANIA DZIAŁAŃ

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których nie występują nawiasy, najpierw wykonujemy:
- potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie
- mnożenie i dzielenie w kolejności ich występowania
- dodawanie i odejmowanie

Przy obliczaniu wartości wyrażeń, w których występują nawiasy, najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, w których nie ma już innych nawiasów.

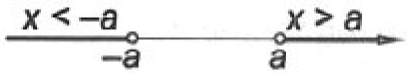
WAROŚĆ BEZWZGLĘDNA

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dla } x \geq 0 \\ -x \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$
7. $|a-b| \leq |a| + |b|$
8. $|a-b| \leq ||a| - |b||$

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

2. $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$



3. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$