

Zadanie -Teraz matura

ZADANIE 16

Dla jakich wartości parametru a iloraz
różnych miejsc zerowych funkcji $f(x)$
jest równy 9^2 .

$$f(x) = \log_3 x - (\alpha^2 - a) \log_3 x + 1 - a$$

zadania:

$$\begin{array}{l} \text{z treści zadania wynika, że} \\ x_1 \cdot x_2 = 9 \text{ oraz } \Delta > 0 \end{array}$$

$$\text{czyli } \log_3(x_1 \cdot x_2) = \log_3 9 \rightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 2 \quad (*)$$

dla $x_1, x_2 > 0$

$$\text{Nier. } \log_3 x = t. \text{ Równość } (*) \text{ przyjmuje postać } t_1 + t_2 = 2 \quad (**)$$

Miejsca zerowe x_1, x_2 funkcji f wyznaczona jadąc zaznaczeniem
przez miejsca zerowe funkcji g czyli t_1, t_2

$$g(t) = t^2 - (\alpha^2 - a)t + 1 - a \rightarrow \Delta' = [-(\alpha^2 - a)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - a)$$

$$\Delta' = (\alpha^2 - a)^2 + 4a - 4$$

Takim z postawionymi warunkami jest $\Delta > 0$

$$\text{Wtedy } \Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - a)^2 + 4a - 4 > 0 \rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 - a^2 + 4) > 0$$

$$\text{Ponieważ do równości } (**) \underbrace{t_1 + t_2 = 2}_{-\frac{b}{a} \text{ (na podst. wzoru na Vieta)} \quad (***)}$$

$$\text{czyli } t_1 + t_2 = 2 \rightarrow \frac{\alpha^2 - a}{1} = 2 \rightarrow \underline{\alpha^2 - a - 2 = 0} \rightarrow \Delta = 9$$

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2$$

Nierówność $(***)$ jest spełniona dla $a = 2$

Sprawdzimy jeszcze czy dla $a=2$
iloczyn miejsc zerowych funkcji $f(x)$ jest równy 9.

$$(\log_3 x)^2 + (a-a^2) \log_3 x + (1-a) = 0$$

Podstawiamy $a=2$

$$(\log_3 x)^2 + (2-4) \log_3 x + (1-2) = 0$$

$$(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 1 = 0$$

Po podstawianiu $\log_3 x = t$ mamy: $t^2 - 2t - 1 = 0 \rightarrow$

$$\Delta_t = 8 \rightarrow t_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad t_2 = 1 + \sqrt{2}$$

wracamy do podstawiania $\log_3 x = t \rightarrow$

$$\rightarrow \log_3 x = 1 - \sqrt{2} \quad * \quad \log_3 x = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_1 = 3^{1-\sqrt{2}}$$

$$x_2 = 3^{1+\sqrt{2}}$$

Sprawdzimy teraz czy iloczyn miejsc zerowych

$$x_1 \cdot x_2 = 9 \rightarrow 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{1+\sqrt{2}} = 3^{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}} = 3^2 = 9$$

Odpowiadź:

Dla $a=2$ iloczyn zerowych miejsc
zerowych funkcji $f(x)$ jest równy 9.