ELEMENTY KOMBINATORYKI /N-SILNIA/

n – silnia

$$n! \overset{df}{=} \begin{cases} 1, & \text{gdy } n=0 \text{ lub } n=1 \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n, & \text{gdy } n \geq 2 \end{cases}$$

PERMUTACJE

Niech dany będzie zbiór n różnych elementów.
Permutacją n różnych elementów nazywamy każdy ciąg n–wyrazowy utworzony ze wszystkich tych elementów. Liczbę permutacji n elementów oznaczamy P_n.

$$P_n = n!$$

1. **Permutacją zbioru skończonego nazywamy każde ustawienie wszystkich jego elementów w dowolnej kolejności.**
2. **Dwie permutacje tego samego zbioru elementów różnią się między sobą tylko kolejnością elementów.**

SYMBOL NEWTONA

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{gdzie } n, k \in N \text{ i } n \geq k$$

Symbol $\binom{n}{k}$ **czytamy: „n po k”** lub **„n nad k”.**

Niech będzie dany zbiór Z, do którego należy n elementów.
Kombinacją k elementów spośród n elementów nazywamy każdy podzbiór k–elementowy zbioru Z, gdzie $0 \leq k \leq n$.
Liczbę kombinacji k elementów spośród n elementów oznaczamy symbolem: C_n^k.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

W kombinacji kolejność elementów jest nieistotna.

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

Niech dany będzie zbiór Z, do którego należy n różnych elementów.
Każdy **k–wyrazowy ciąg**, którego wszystkie wyrazy są różne i należą do n–elementowego zbioru ($k \le n$) nazywamy **k–elementową wariacją bez powtórzeń n–elementowego zbioru.**
Liczbę k–elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego oznaczamy symbolem V_n^k.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

W wariacji bez powtórzeń kolejność elementów jest istotna (bo tworzymy ciąg k–wyrazowy) i elementy nie mogą się powtarzać ($k \le n$).

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

Niech dany będzie zbiór Z, do którego należy n elementów.
Każdy k–wyrazowy ciąg, o wyrazach należących do n–elementowego zbioru nazywamy **k–elementową wariacją z powtórzeniami n–elementowego zbioru.**
Liczbę k-elementowych wariacji z powtórzeniami spośród n elementów oznaczamy symbolem W_n^k.

$$W_n^k = n^k$$

1. **Wariacja k–elementowa z powtórzeniami jest ciągiem, w którym wyrazy mogą (choć nie muszą) się powtarzać.**
2. **Kolejność elementów jest istotna (bo tworzymy ciąg k–wyrazowy).**

DOŚWIADCZENIA LOSOWE

Doświadczeniem losowym nazywamy takie doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w warunkach identycznych lub bardzo zbliżonych i którego wyniku nie można przewidzieć jednoznacznie.

ZDARZENIA LOSOWE

Zdarzeniem losowym, lub krótko zdarzeniem, nazywamy wynik doświadczenia.
Wśród wyników danego doświadczenia możemy wyróżnić **najprostsze wyniki doświadczenia losowego,** które nazywać będziemy **zdarzeniami elementarnymi.**
Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczamy Ω lub$E$.

ZDARZENIA LOSOWE JAKO PODZBIÓR ZBIORU ZDARZEŃ ELEMENTARNYCH

Każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych Ω nazywamy zdarzeniem losowym lub krótko: zdarzeniem.

Zbiór pusty $\varnothing$ będziemy utożsamiać (nazywać) ze **zdarzeniem niemożliwym.** Zdarzenie to nie zachodzi w żadnym doświadczeniu.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω będziemy nazywali **zdarzeniem pewnym.** Zdarzenie pewne zachodzi w każdym doświadczeniu.

LICZBA ZDARZEŃ LOSOWYCH

Jeśli zbiór zdarzeń elementarnych Ω **ma n elementów**, to **zdarzeń losowych jest 2^n** (łącznie ze zdarzeniem pewnym i zdarzeniem niemożliwym).

RELACJE MIĘDZY ZDARZENIAMI

Ponieważ **zdarzenia losowe** są **zbiorami,** więc między zdarzeniami losowymi występują wszystkie te związki (relacje), które występują między zbiorami:

$A \cup B$	suma (alternatywa) zdarzeń A, B
$A \cap B$	iloczyn (koniunkcja) zdarzeń A, B
$A \setminus B$	różnica zdarzeń A, B
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A
	$A' = \Omega \setminus A, \quad A \cup A' = \Omega$
$A \cap B = \varnothing$	zdarzenia A, B wykluczają się
$A \subset B$	zdarzenie A pociąga zdarzenie B

CZĘSTOŚĆ ZDARZENIA

W pojedynczym doświadczeniu losowym dane zdarzenie, nazwijmy je np. A, może zajść lub nie. Załóżmy, że doświadczenie to powtórzyliśmy N **razy**, w wyniku czego zdarzenie A zaszło k **razy** ($k \le N$).

Iloraz $\frac{k}{N}$ nazywamy **częstością zdarzenia A.**

AKSJOMATYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana jedna liczba $P(A)$ taka, że:

I. $P(A) \ge 0$

II. dla każdej pary wykluczających się zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzi
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

III. $P(\Omega) = 1$

to mówimy, że **na zdarzeniach w zbiorze** Ω określone jest **prawdopodobieństwo**, a **liczbę** $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia A.**

KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ oraz zdarzenia jednoelementowe $\{\omega_i\}$, gdzie $i = 1, 2, ..., n$ są jednakowo prawdopodobne, tzn.

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n},$$

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych, wyraża się wzorem

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych zbioru } \Omega}$$

Jeżeli przyjmiemy następujące oznaczenia:

$\overline{\overline{A}}$ – liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

$\overline{\overline{\Omega}}$ – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych,

to powyższy wzór możemy zapisać:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, zaś P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A, B \subset \Omega$. Wówczas:

a) $P(\varnothing) = 0$
b) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$
c) dla każdego $A \subset \Omega$ jest $P(A) \leq 1$
d) $P(A) + P(A') = 1$
e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, nazywamy liczbę:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

W przypadku klasycznym, tzn. gdy wszystkie możliwe wyniki są jednakowo prawdopodobne, prawdopodobieństwo warunkowe można obliczyć ze wzoru:

$$P(A/B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO ILOCZYNU ZDARZEŃ

Dla dowolnej pary zdarzeńA, B takich, że $A, B \subset \Omega$ i $P(B)>0$ zachodzi równość:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cap P(B)$$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE /ZUPEŁNE/

Niech zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$, $B_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, ..., n$ wykluczają się parami (tzn. są zdarzeniami, dla których $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$), oraz takimi, że jedno z nich na pewno zajdzie, czyli $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$.
Zakładamy ponadto, że $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, ..., n$.
Wówczas dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór:

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + ... + P(B_n) \cdot P(A/B_n)}$$

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, zaś P będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A, B \subset \Omega$.
Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi**, jeżeli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

SCHEMAT BERNOULLEGO

Doświadczenie losowe, którego zbiór wyników ma tylko dwa elementy, nazywamy **próbą Bernoulliego**. Jeden z tych wyników przyjęto nazywać **sukcesem**, drugi **porażką.**
Schematem n prób Bernoulliego nazywamy ciąg n niezależnych powtórzeń tej samej próby, w tych samych warunkach ($n \in N^+$).
Prawdopodobieństwo, że w n próbach Bernoulliego sukces wypadnie dokładnie k razy wyraża się wzorem:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu, zaś $q = 1 - p$ prawdopodobieństwem porażki w jednej próbie Bernoulliego, przy czym $0 < p < 1$, $k = 0, 1, ..., n$.

NAJBARDZIEJ PRAWDOPODOBNA LICZBA SUKCESÓW W SCHEMACIE BERNOULLEGO

Niech w schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo p będzie różne od 0 i 1.

1. Jeżeli **$(n + 1)p$ nie jest liczbą całkowitą**, to **najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów** w schemacie n prób Bernoulliego **jest największa liczba całkowita k_0** taka, że
   $$k_0 < (n + 1)p$$
2. Jeżeli **$(n + 1)p$ jest liczbą całkowitą**, to **najbardziej prawdopodobne są wartości $(n + 1)p - 1$ i $(n + 1)p$ i prawdopodobieństwa ich są równe.**