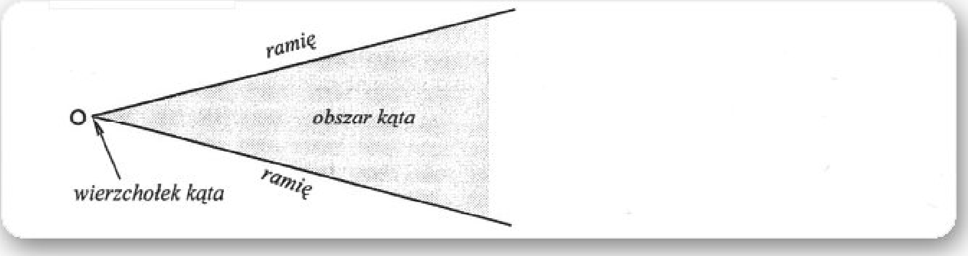
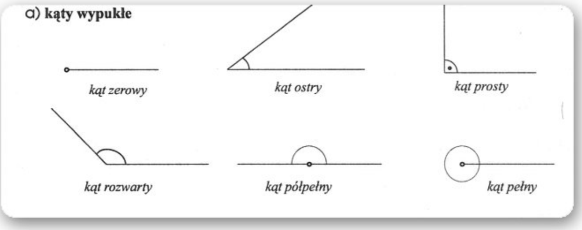
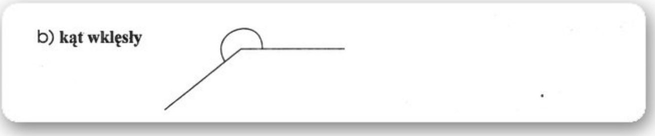
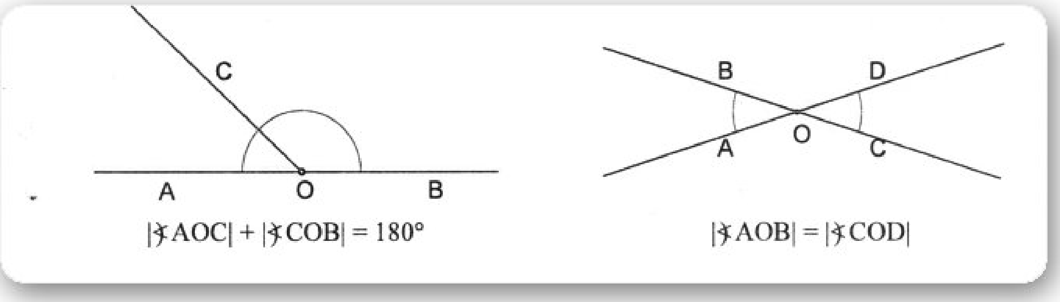
KĄTY



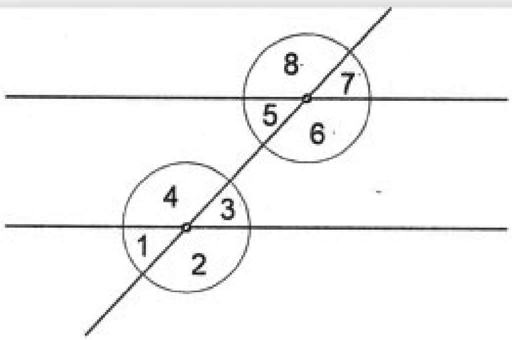




KĄTY PRZYLEGŁE I KĄTY WIERZCHOŁKOWE



DWIE PROSTE RÓWNOLEGŁE PRZECIĘTE TRZECIĄ PROSTĄ



Kąty odpowiadające równe:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 5$ $\quad$ $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$

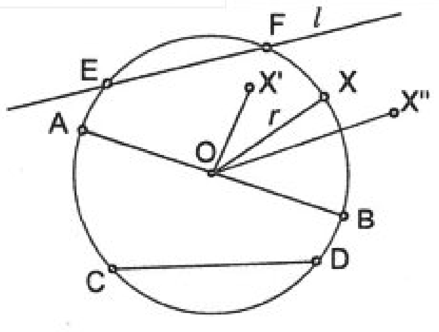
$\measuredangle 2 = \measuredangle 6$ $\quad$ $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$

Kąty naprzemianległe równe:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 7$ $\quad$ $\measuredangle 4 = \measuredangle 6$

$\measuredangle 2 = \measuredangle 8$ $\quad$ $\measuredangle 3 = \measuredangle 5$

OKRĄG I KOŁO

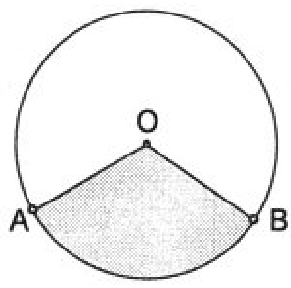


$o(O; r)$ – okrąg o środku O i promieniu długości r
$k(O; r)$ – koło o środku O i promieniu długości r
$o(O; r) \subset k(O; r)$

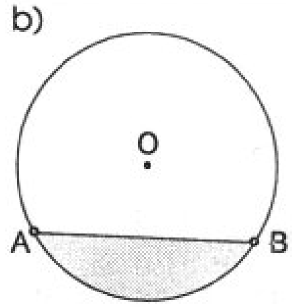
Jeśli $|OX| = r$ to $X \in o(O; r)$
Jeśli $|OX| \le r$ to $X \in k(O; r)$
Jeśli $|OX| > r$ to $X \notin k(O; r)$
gdzie: O – stały punkt płaszczyzny
X – dowolny punkt płaszczyzny
r – liczba stała większa od zero $(r > 0)$

OX – promień okręgu (koła), $|OX| = r$
AB – średnica okręgu (koła), $O \in AB$, $|AB| = 2r$
CD – cięciwa okręgu (koła), $|CD| \le |AB|$
l – sieczna, $E \in l$ i $F \in l$, $E \ne F$

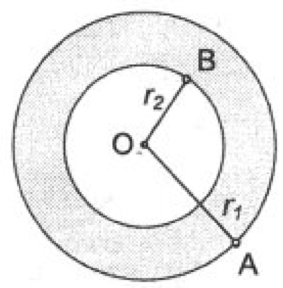
CZĘŚCI KOŁA

a)


Wycinek koła

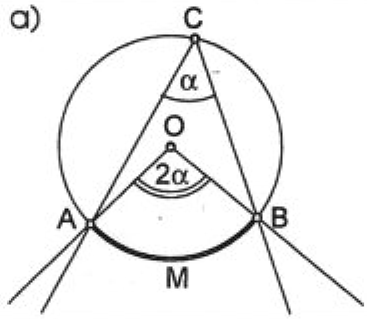
b)


Odcinek koła

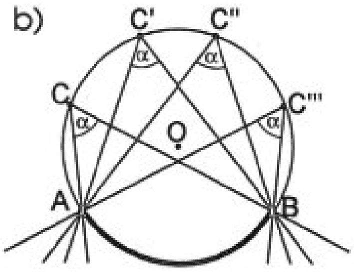
c)


Pierścień

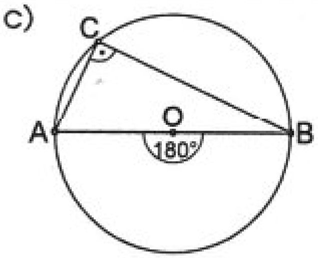
KĄTY W KOLE

a)


$\sphericalangle ACB$ – kąt wpisany
$\sphericalangle AOB$ – kąt środkowy
Kąty ACB i AOB oparte są na tym samym łuku AMB
$|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$
Jeśli $|\sphericalangle ACB| = \alpha$ to $|\sphericalangle AOB| = 2\alpha$

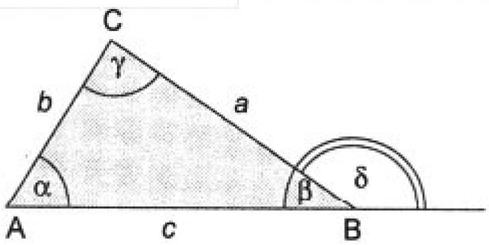


Kąty wpisane oparte na tym samym łuku
$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle AC''B| = |\sphericalangle AC'''B|$



Kąt wpisany oparty na półokręgu
$|\sphericalangle ACB| = 90°$

TRÓJKĄT



Wielokąt o trzech bokach nazywamy trójkątem. Sposób oznaczania trójkąta o wierzchołkach A, B, C pokazuje rysunek.

Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$|a-b| < c < a+b \ \wedge\ |b-c| < a < b+c \ \wedge\ |c-a| < b < c+a \quad .$$

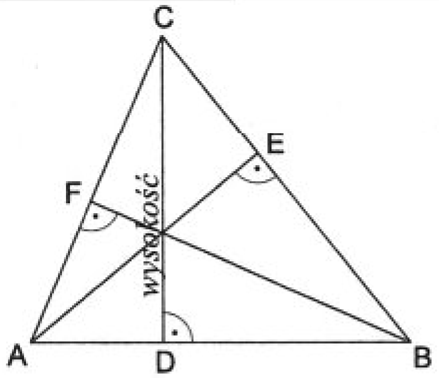
Kąty wewnętrzne i kąty zewnętrzne trójkąta

Kąty trójkąta: $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ACB$ o miarach α, β, γ nazywamy kątami wewnętrznymi trójkąta (rys.4.9.9).
W każdym trójkącie suma miar kątów równa się 180°: $\underline{\alpha + \beta + \gamma = \mathbf{180}}$

Kąt o mierze δ nazywamy kątem zewnętrznym przyległym do kąta o mierze β (rys.4.9.9).
$\beta + \delta = 180°$, $\underline{\delta = \alpha + \gamma}$

Miara każdego kąta zewnętrznego równa się sumie miar dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

WYSOKOŚĆ TRÓJKĄTA



Wysokością trójkąta nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek trójkąta, a drugim rzut prostokątny tego wierzchołka na prostą wyznaczoną przez pozostałe wierzchołki trójkąta.

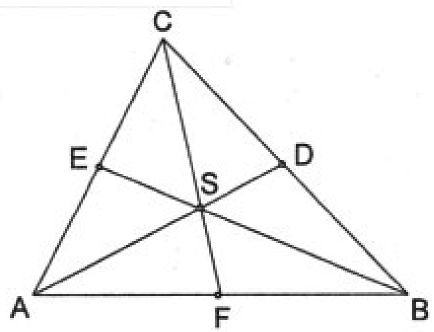
Wysokości: CD, AE, BF

Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

Proste, w których zawierają się wysokości, przecinają się w jednym punkcie.

ŚRODKOWA TRÓJKĄTA

Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



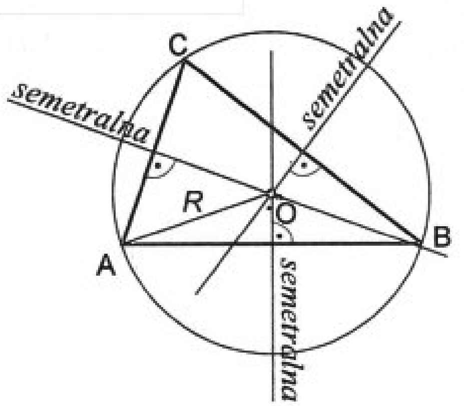
Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie zwanym **środkiem ciężkości trójkąta**. Punkt S dzieli każdą ze środkowych na dwie części, z których odcinek łączący wierzchołek z punktem S jest dwa razy dłuższy od pozostałej części tej środkowej.

Jeśli S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to:

$$\frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|BS|}{|SE|} = \frac{|CS|}{|SF|} = 2$$

SYMETRALNE BOKÓW TRÓJKĄTA

Symetralną boku trójkąta nazywamy prostą prostopadłą do tego boku i przechodzącą przez jego środek.



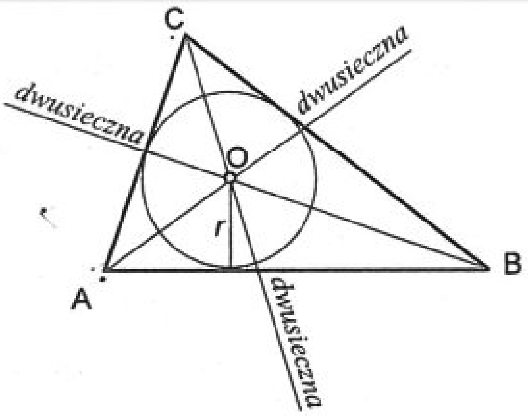
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Ponieważ punkt ten należy do symetralnej każdego boku trójkąta, jest więc równo oddalony od wszystkich wierzchołków tego trójkąta
$|AO| = |BO| = |CO|$

Punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

$R = |AO|$ – *długość promienia okręgu opisanego na trójkącie*

DWUSIECZNE KĄTÓW TRÓJKĄTA

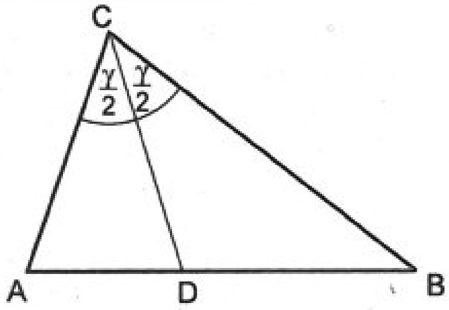
Dwusieczną kąta trójkąta nazywamy półprostą będącą wspólną częścią obszaru kąta wewnętrznego trójkąta i jego osi symetrii.
Dwusieczna kąta dzieli kąt na dwa kąty przystające. Dwusieczna kąta wypukłego, (a takimi są wszystkie kąty trójkąta) jest zbiorem wszystkich punktów tego kąta jednakowo oddalonych od jego ramion.



Dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem koła wpisanego w trójkąt.

$r = |OD|$ – długość promienia koła wpisanego w trójkąt

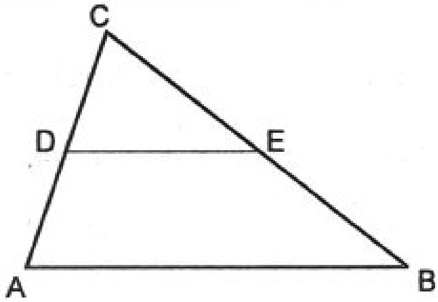
TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ



Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków.

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

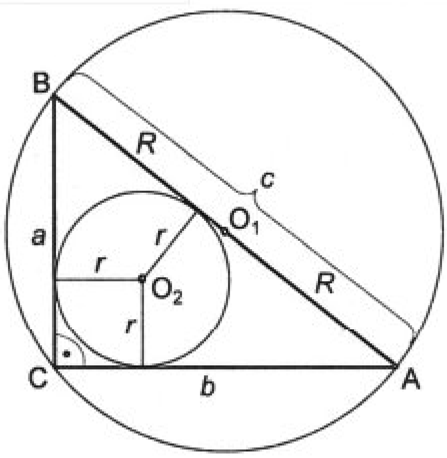
ODCINEK ŁĄCZĄCY ŚRODKI DWÓCH BOKÓW TRÓJKĄTA



Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku trójkąta.

$$DE \parallel AB \; ; \; |DE| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

PROMIEŃ KOŁA WPISANEGO W TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY I PROMIEŃ KOŁA OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM



R – długość promienia koła opisanego na trójkącie prostokątnym
r – długość promienia koła wpisanego w trójkąt prostokątny

$$R = \frac{c}{2} \qquad r = \frac{a+b-c}{2}$$

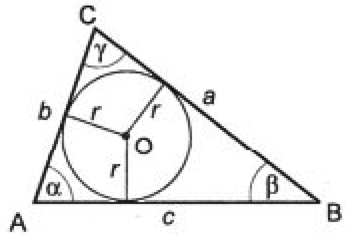
$$r = \frac{P}{p} = \frac{ab}{a+b+c}$$

$P = \dfrac{ab}{2}$ – pole trójkąta prostokątnego

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – połowa obwodu trójkąta

PROMIEŃ KOŁA WPISANEGO W TRÓJKĄT DOWOLNY I PROMIEŃ KOŁA OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE DOWOLNYM

a)

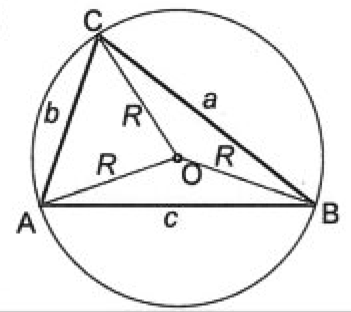


$$r=\frac{P}{p}\ ,\qquad p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$r=\frac{2P}{a+b+c}$$

P – pole trójkąta

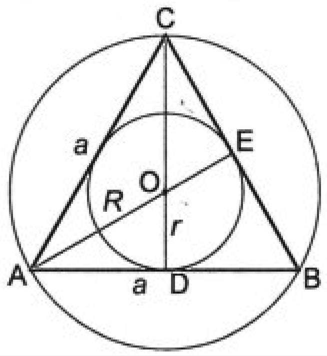
b)



$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4P}$$

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma}$$

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY – DŁUGOŚCI WYSOKOŚCI, PROMIENIE KOŁA WPISANEGO I OPISANEGO



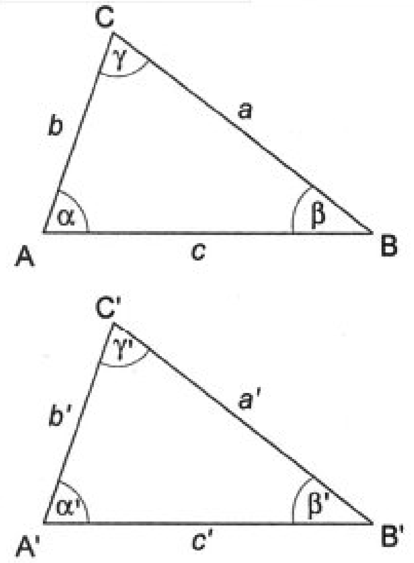
$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\frac{1}{3}\cdot h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R=\frac{2}{3}\cdot h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$|AE|=|CD|=h$$

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW



$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

„≡” – jest przystający

Dwa trójkąty są przystające: Δ **ABC** $\equiv \Delta$ **A'B'C'** , gdy:

I cecha przystawania trójkątów (bbb):

$AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge CA \equiv C'A'$

II cecha przystawania trójkątów (bkb):

$AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$

lub

$BC \equiv B'C' \wedge CA \equiv C'A' \wedge \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A'$

lub

$CA \equiv C'A' \wedge AB \equiv A'B' \wedge \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$

III cecha przystawania trójkątów (kbk):

$AB \equiv A'B' \wedge \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B' \wedge \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$

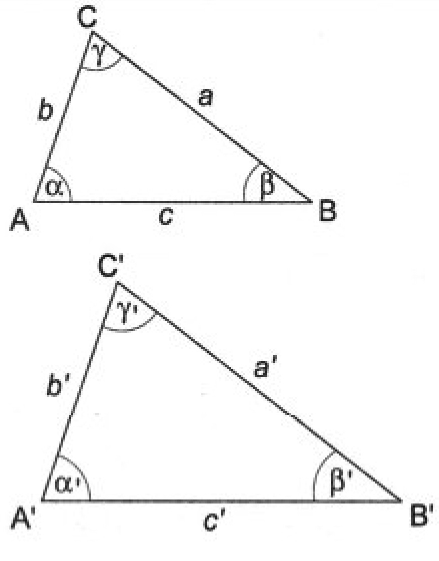
lub

$BC \equiv B'C' \wedge \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \wedge \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A'$

lub

$CA \equiv C'A' \wedge \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A' \wedge \sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

„~” – jest podobny

I cecha podobieństwa trójkątów:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

II cecha podobieństwa trójkątów:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \wedge |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$$

lub

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|} \wedge |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|$$

lub

$$\frac{|CA|}{|C'A'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} \wedge |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'|$$

III cecha podobieństwa trójkątów:

$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'| \wedge |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$

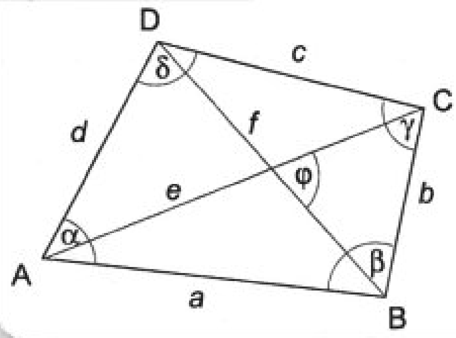
lub

$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'| \wedge |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'|$

lub

$|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B'C'A'| \wedge |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C'A'B'|$

CZWOROKĄT WYPUKŁY

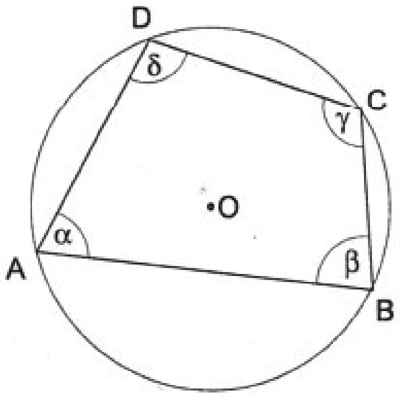


Wielokąt, który ma cztery boki nazywamy czworokątem.

Jeżeli wszystkie kąty wewnętrzne czworokąta są kątami wypukłymi to czworokąt nazywamy wypukłym.

Wśród czworokątów wyróżniamy: kwadraty, prostokąty, równoległoboki, romby, trapezy, deltoidy.

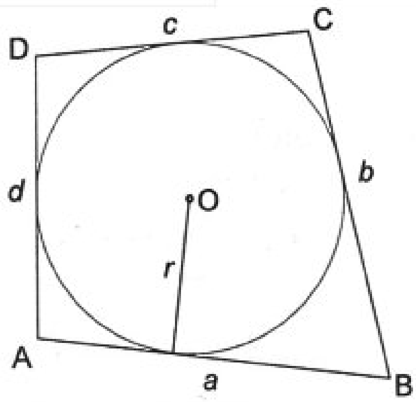
CZWOROKĄT WPISANY W OKRĄG



Czworokąt można wpisać w okrąg (na czworokącie można opisać okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa 180°.

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

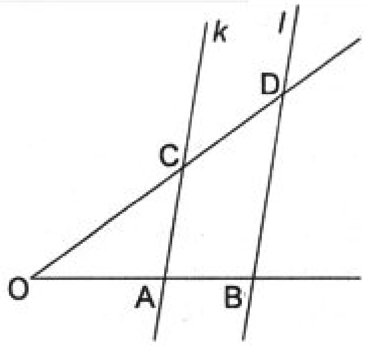
CZWOROKĄT OPISANY NA OKRĘGU



Czworokąt wypukły można opisać na okręgu (w czworokąt można wpisać okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe.

$a + c = b + d$

TWIERDZENIE TALESA



Jeżeli ramiona kąta AOC (rys.4.9.32) przetniemy dwiema prostymi równoległymi *k* i *l* to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu.

Jeśli $k \parallel l$ **to** $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$

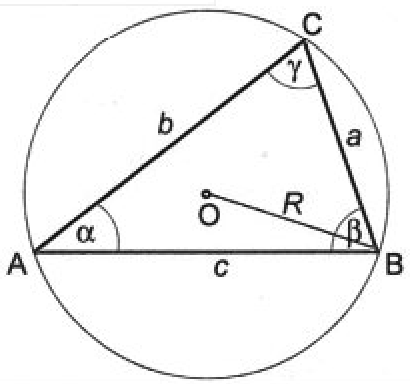
Z twierdzenia Talesa wynikają trzy ważne proporcje:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}, \quad \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|AB|}{|CD|}, \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

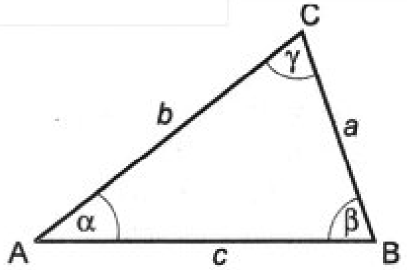
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.
Jeżeli dwie proste *k* i *l* przecinają jedno ramię kąta o wierzchołku O w punktach A i B, a drugie ramię w punktach C i D i wyznaczają na ramionach kąta odcinki OA i OB proporcjonalne do odcinków OC i OD to proste *k* i *l* są równoległe (rys.4.9.32)

TWIERDZENIE SINUSÓW



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

TWIERDZENIE KOSINUSÓW

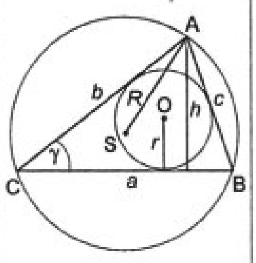


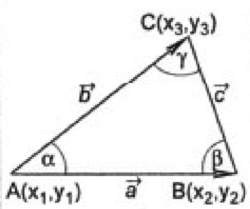
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Twierdzenie Pitagorasa jest szczególnym przypadkiem twierdzenia cosinusów (dla $\gamma = 90°$ mamy: $c^2 = a^2 + b^2$)

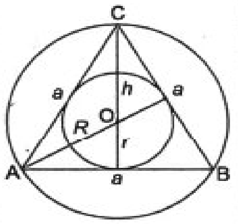
POLA, OBWODY I INNE ZWIĄZKI MIAROWE FIGUR PŁASKICH

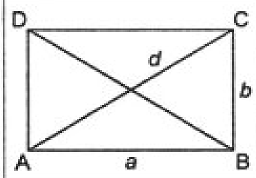
Oznaczenia:
P – pole figury , Ob – obwód figury,
$a, b, c,\ldots$ – długości boków , d – długość przekątnej,
h – długość wysokości , $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – miary kątów między bokami

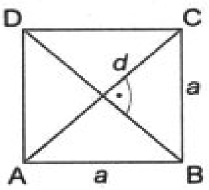
<table>
<tr>
<td>Trójkąt</td>
<td>


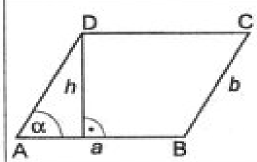


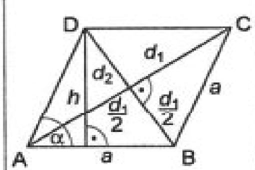
</td>
<td>
$P = \frac{ah}{2}$
$P = \frac{ab\sin\gamma}{2}$
$P = \frac{(a+b+c)\cdot r}{2}$
$P = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$
$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$P = \frac{1}{2}\left|a_1b_2 - a_2b_1\right|$
$P = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|$
$P = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$
</td>
<td>$Ob = a + b + c$</td>
<td>
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$h = b\sin\gamma$
$r = \frac{2P}{a+b+c}$
$R = \frac{abc}{4P}$
$R = \frac{a}{2\sin\alpha} =$
$= \frac{b}{2\sin\beta} =$
$= \frac{c}{2\sin\gamma}$
$p = \frac{a+b+c}{2}$
$\vec{a} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1] =$
$= [a_1, a_2]$
$\vec{b} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1] =$
$= [b_1, b_2]$
</td>
</tr>
</table>

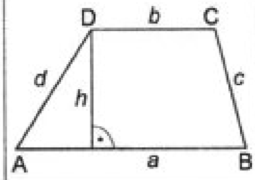
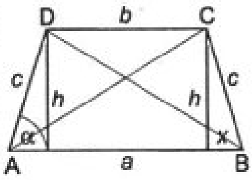
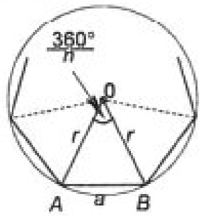
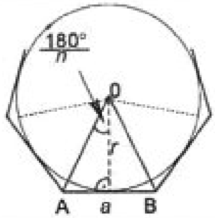
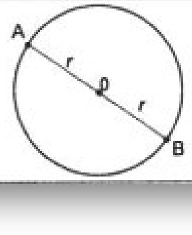
Trójkąt równoboczny		$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$Ob = 3a$	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $r = \frac{1}{3}h$ $R = \frac{2}{3}h$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

Prostokąt		$P = a \cdot b$	$Ob = 2a + 2b$	$\|AC\| = \|BD\|$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Kwadrat		$P = a^2$ $P = \frac{d^2}{2}$	$Ob = 4a$	$\|AC\| = \|BD\|$ $AC \perp BD$ $d = a\sqrt{2}$

Równo-ległobok		$P = a \cdot h$ $P = ab\sin\alpha$	$Ob = 2a + 2b$	$h = b\sin\alpha$

Romb		$P = a \cdot h$ $P = a^2\sin\alpha$ $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	$Ob = 4a$	$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$ $h = a\sin\alpha$ $AC \perp BD$

Trapez		$P=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$	$Ob=a+b+c+d$	
Trapez równo-ramienny		$P=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$ $P=c(a-c\cos\alpha)\sin\alpha$	$Ob=a+b+2c$	$h=c\sin\alpha$ $x=c\cos\alpha$ $b=a-2c\cos\alpha$ $h^2=c^2-x^2$ $x=\dfrac{a-b}{2}$ $\lvert AC\rvert=\lvert BD\rvert$
Pole wielokąta foremnego o n bokach wpisanego w okrąg		$P=\dfrac{1}{2}nr^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$	$Ob=n\cdot a$	n – liczba boków wielokąta
Pole wielokąta foremnego o n bokach opisanego na okręgu		$P=\dfrac{1}{2}nar$ $P=p\cdot r$ $P=nr^2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$Ob=n\cdot a$	n – liczba boków wielokąta $2p=n\cdot a$
Koło i okrąg		$P=\pi r^2$	$Ob=2\pi r$	$\lvert OA\rvert=\lvert OB\rvert=r$ $\lvert AB\rvert=2r$