ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PUNKTÓW

Odległość między punktami A i B oznaczamy symbolem |AB|. Jeżeli $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, to odległość między punktami A i B wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Powyższy wzór nazywamy też wzorem na długość odcinka AB.

WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA ODCINKA

Niech $S = (x_S, y_S)$ będzie środkiem odcinka AB. Jeśli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to środek S odcinka AB ma współrzędne:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}\ ,\ y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH

Odległość dwóch prostych równoległych $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|C - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{lub} \quad d = \frac{|C - C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

WSPÓŁRZĘDNE WEKTORA

Jeśli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to współrzędnymi wektora AB nazywamy liczby:

$$a_1 = x_B - x_A\ ,\ a_2 = y_B - y_A$$

Stąd: $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$ lub $\overrightarrow{AB} = [a_1, a_2]$

RÓWNOŚĆ WEKTORÓW

Jeśli $u = [a_1, a_2]$, $v = [b_1, b_2]$, to: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \text{ i } a_2 = b_2)$

DŁUGOŚĆ WEKTORA

Jeśli $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$, to: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Jeśli $\vec{u} = [a_1, a_2]$, to: $|u| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

DZIAŁANIA NA WEKTORACH

Jeśli $\vec{u} = [a_1, a_2]$, $\vec{v} = [b_1, b_2]$, to:

1. $\vec{u} + \vec{v} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$
2. $\vec{u} - \vec{v} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$
3. $k \cdot \vec{u} = [ka_1, ka_2]$, $k \in R$

KĄT MIĘDZY WEKTORAMI

Wzory na sinus i cosinus kąta między wektorami $u = [a_1, a_2]$, $v = [b_1, b_2]$

$$\sin\gamma = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|u| \cdot |v|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|u| \cdot |v|}$$

ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

$\vec{u} \circ \vec{v} = |u| \cdot |v| \cos\gamma$, gdzie γ – kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$

$\vec{u} \circ \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, gdzie $\vec{u} = [a_1, a_2]$, $\vec{v} = [b_1, b_2]$

WARUNEK PROSTOPADŁOŚCI WEKTORÓW

Jeśli $\vec{u} = [a_1, a_2]$, $\vec{v} = [b_1, b_2]$, to: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

WARUNEK RÓWNOLEGŁOŚCI WEKTORÓW

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \bigvee_{k \in R} \vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

Jeśli $\vec{u} = [a_1, a_2]$, $\vec{v} = [b_1, b_2]$, to: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

WYZNACZNIK PARY WEKTORÓW

Wyznacznikiem uporządkowanej pary wektorów niezerowych $\vec{u} = [a_1, a_2]$, $\vec{v} = [b_1, b_2]$ nazywamy liczbę:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

POLE TRÓJKĄTA

Jeśli punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta, to pole tego trójkąta wyraża się wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|,$$

gdzie $\overrightarrow{AB} = [a_1, a_2]$ i $\overrightarrow{AC} = [b_1, b_2]$

RÓWNANIE KIERUNKOWE PROSTEJ

Równaniem kierunkowym prostej nieprostopadłej do osi x nazywamy równanie postaci:

$$y = mx + b$$

gdzie $m = \operatorname{tg}\alpha$ – współczynnik kierunkowy prostej (α – kąt nachylenia prostej $y = mx + b$ do osi x), zaś b – rzędna punktu przecięcia prostej z osią y.

WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DWA PUNKTY

Jeśli prosta przechodzi przez dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ i $x_A \neq x_B$, to współczynnik kierunkowy m tej prostej wyraża się wzorem:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ PUNKT P O DANYM WSPÓŁCZYNNIKU KIERUNKOWYM

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DWA RÓŻNE PUNKTY A I B

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \text{ gdy } x_A \neq x_B$$

RÓWNANIE OGÓLNE PROSTEJ

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

A, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej

1. Warunek $A^2 + B^2 > 0$ oznacza, że A i B nie są jednocześnie równe zero.
2. Współczynniki A i B równania prostej $Ax + By + C = 0$ są współrzędnymi wektora $\vec{u} = [A, B]$ prostopadłego do tej prostej.

WARUNKI RÓWNOLEGŁOŚCI I PROSTOPADŁOŚCI PROSTYCH

Warunek równoległości prostych $y = m_1x + b_1$ i $y = m_2x + b_2$

$$m_1 = m_2$$

Warunek prostopadłości prostych $y = m_1x + b_1$ i $y = m_2x + b_2$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Warunek równoległości prostych $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$AB_1 - BA_1 = 0$$

Warunek prostopadłości prostych $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$$AA_1 + BB_1 = 0$$

RÓWNANIE OKRĘGU O ŚRODKU W PUNKCIE S I PROMIENIU R

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ lub $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C = 0$, gdzie:

$c = a^2 + b^2 - r^2$ i $a^2 + b^2 - c > 0 \quad (r = \sqrt{a^2 + b^2 - c})$

W szczególnym przypadku, gdy $S = (0, 0)$, to równanie okręgu ma postać:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

KOŁO

Nierówność opisująca koło o środku S = (a, b) i promieniu długości $r > 0$ ma postać:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \text{ lub } x^2 + y^2 - 2ax - 2by + C \leq 0,$$

gdzie: $c = a^2 + b^2 - r^2$ i $a^2 + b^2 - c > 0$