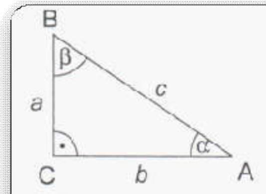
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO



α, β – kąty ostre w trójkącie prostokątnym

$\alpha + \beta = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ - \beta$, $\beta = 90^\circ - \alpha$

a – przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta α (przeciwległa kątowi α)

b – przyprostokątna leżąca przy kącie α (przeciwległa kątowi β)

c – przeciwprostokątna

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$	$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$	$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$	$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$	$\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$	$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYZNYCH KĄTÓW 30^o, 45^o, 60^o

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI TEGO SAMEGO KĄTA

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

MIARA KĄTA, STOPIEŃ , RADIAN

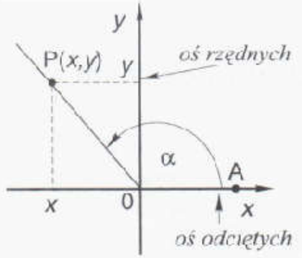
$1^\circ = \frac{1}{90}$ kąta prostego, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$

Radianem nazywamy taki kąt środkowy, który opiera się na łuku długości równej długości promienia okręgu.

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radianów, $1 \text{ radian} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

1 radian $\approx 57^\circ 17' 44''$, $1^\circ \approx 0{,}01745$ radianów

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA



$\overrightarrow{OA}$ – ramię początkowe kąta dowolnego α

$\overrightarrow{OP}$ – ramię końcowe kąta dowolonego α

OP – promień wodzący punktu P

$r = |OP|$ – długość promienia wodzącego punktu P

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \quad \text{lub} \quad \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \text{lub} \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$ dla $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$
6. $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$ dla $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, $\cos(\alpha-\beta) \neq 0$
7. $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$ dla $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$, $\sin(\alpha+\beta) \neq 0$
8. $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta}$ dla $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$, $\sin(\alpha-\beta) \neq 0$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE PODWOJONEGO KĄTA

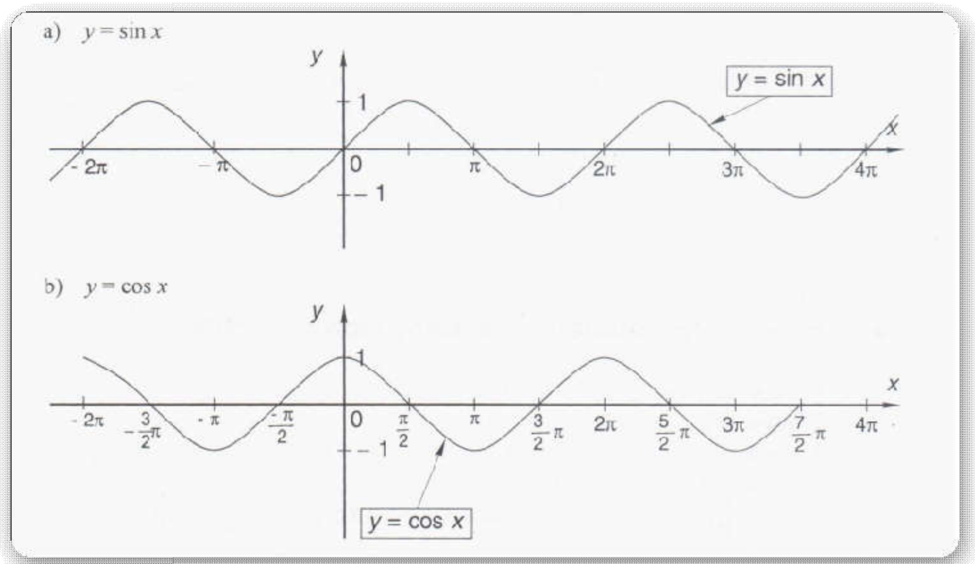
1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
3. $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq 0$
4. $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$ i $\sin 2\alpha \neq 0$

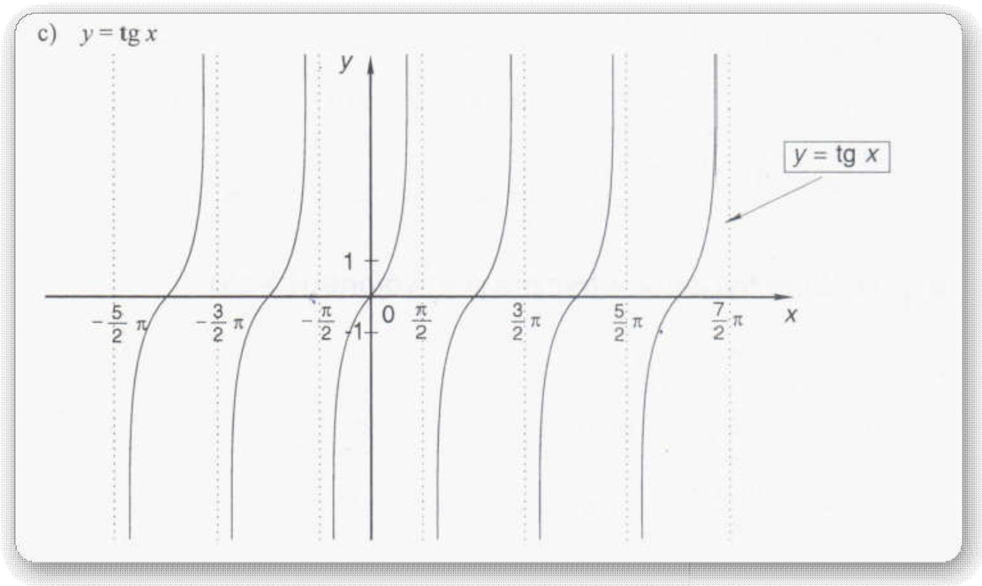
FUNKCJE POŁOWY KĄTA

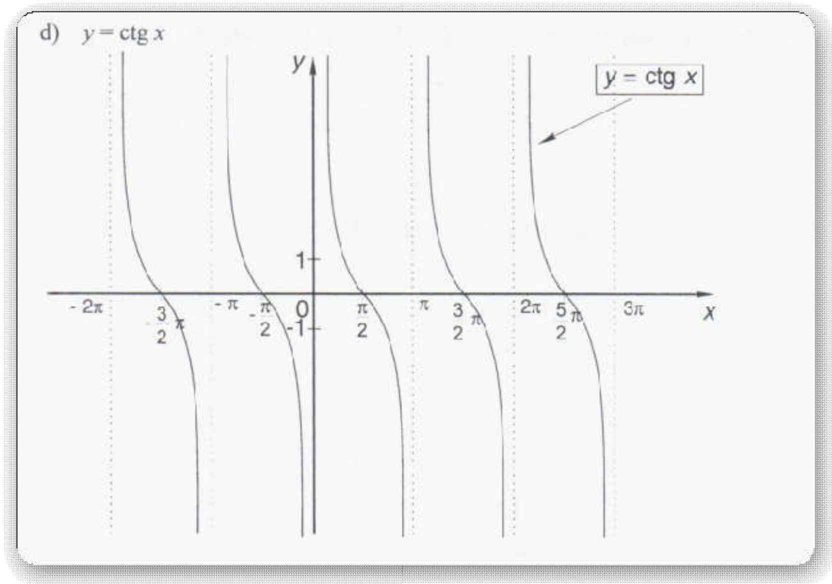
1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ lub $\sin\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ lub $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
3. $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$
4. $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$

SUMA I RÓŻNICA FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH	*WZORY WYRAŻAJĄCE FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA PRZEZ TANGENS POŁOWY KĄTA*
1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 5. $\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, dla $\cos\alpha\neq0$ i $\cos\beta\neq0$ 6. $\text{tg}\,\alpha-\text{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, dla $\cos\alpha\neq0$ i $\cos\beta\neq0$. 7. $\text{ctg}\,\alpha+\text{ctg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, dla $\sin\alpha\neq0$ i $\sin\beta\neq0$ 8. $\text{ctg}\ -\text{ctg}\,\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, dla $\sin\alpha\neq0$ i $\sin\beta\neq0$	1. $\sin\alpha=\frac{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 2. $\cos\alpha=\frac{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 3. $\text{tg}\alpha=\frac{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 4. $\text{ctg}\alpha=\frac{\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\text{ctg}\frac{\alpha}{2}}$

WYKRESY FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH







RÓWNANIA TRYGONOMETRYCZNE

RÓWNANIAMI TRYGONOMETRYCZNYMI NAZYWAMY RÓWNANIA W KTÓRYCH NIEWIADOME WYSTĘPUJĄ TYLKO POD ZNAKAMI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH.

1. $\sin x = a$ dla $|a| \leq 1$
   $x_1 = x_0 + 2k\pi$ lub $x_2 = (\pi - x_0) + 2k\pi$, gdzie $k \in C$ i $a = \sin x_0$
2. $\cos x = a$ dla $|a| \leq 1$
   $x_1 = x_0 + 2k\pi$ lub $x_2 = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in C$ i $a = \cos x_0$
3. $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in C$ i $a = \operatorname{tg} x_0$
4. $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in C$ i $a = \operatorname{ctg} x_0$