POJĘCIE CIĄGU LICZBOWEGO

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich. Wartość $f(n)$ funkcji f dla argumentu n będziemy oznaczali a_n i nazywali n–tym wyrazem ciągu, sam zaś ciąg będziemy oznaczali: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ lub krótko (a_n).
Funkcje określone na skończonym zbiorze początkowych kolejnych liczb naturalnych nazywamy ciągami skończonymi.

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

1. Ciąg (a_n) jest rosnący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} > a_n$

2. Ciąg (a_n) jest malejący $\Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} < a_n$

Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami monotonicznymi.

ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ

Jeśli $\boldsymbol{T(n)}$ oznacza pewne **twierdzenie** mówiące o **liczbie naturalnej $\boldsymbol{n}$,** to **aby udowodnić,** że twierdzenie to **jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $\boldsymbol{n}$, wystarczy:**

1. sprawdzić, że jest ono prawdziwe dla pewnej liczby $n = n_0$, tzn sprawdzić, że zachodzi $T(n_0)$;
2. dla każdej liczby naturalnej $n = k \geq n_0$ z założenia, że twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej $n = k$ wykazać, że jest ono prawdziwe dla liczby następnej $n = k + 1$.

OKREŚLENIE CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do poprzedniego wyrazu tej samej liczby r. Liczbę r nazywamy **różnicą ciągu arytmetycznego.**

Ciąg arytmetyczny może być nieskończony lub skończony, ale ciąg skończony musi mieć co najmniej trzy wyrazy.

WZÓR NA N-TY WYRAZ CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Każdy wyraz ciągu arytmetycznego z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego, jeżeli jest skończony) jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

WZÓR NA SUMĘ N- POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}$

OKREŚLENIE CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę samą liczbę q. **Liczbę q** nazywamy **ilorazem** ciągu geometrycznego.

Ciąg geometryczny może być nieskończony lub skończony, ale ciąg skończony musi zawierać co najmniej trzy wyrazy.

WZÓR N-TY WYRAZ CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Każdy wyraz ciągu geometrycznego z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) spełnia warunek: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

WZÓR NA SUMĘ N-POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ gdy } q \neq 1 \\ n \cdot a_1, \text{ gdy } q = 1 \end{cases}$$

OKREŚLENIE SZEREGU GEOMETRYCZNEGO

Ciąg nieskończony (S_n) o wyrazach:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_1 q$$
$$S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-1}$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

nazywamy **ciągiem sum częściowych ciągu geometrycznego** lub **szeregiem geometrycznym** i oznaczamy:

$$a_1 + a_1 q + ... a_1 q^{n-1} + ...$$

ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU GEOMETRYCZNEGO

Szereg geometryczny jest zbieżny i ma granicę $S = \dfrac{a_1}{1-q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$|q| < 1$ **lub** $a_1 = 0$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \text{ gdy } |q| < 1 \quad \text{lub} \quad S = 0 \text{ gdy } a_1 = 0$$